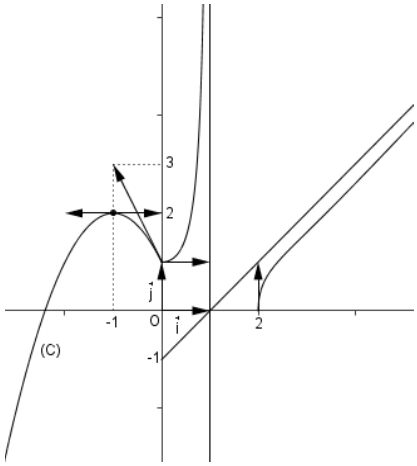
SERIE D'EXERCICES
Dérivabilité d'une fonction

EXERCICE 1 :

Dans le graphique suivant on a tracé selon un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$. La droite $\Delta : y=x-1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. La courbe (C) admet au voisinage de $(-\infty)$ une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$. La droite D : x=1 est une asymptote à (C). Les flèches représentent des vecteurs directeurs des demi-tangentes à (C).



1) a) Déterminer : $f'(-1)$; $f'_d(0)$; $f'_g(0)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x)}{x-2}$

   b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.

2) Déterminer les limites suivantes :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f (on demande les signes de f '(x)).

4) On pose h(x)=tanx et $k(x)=\frac{\pi}{4}f(x)$. Soit g la fonction définie par : $g(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}f(x)\right)$

   Sachant que $f(x)=-x^2 - 2x + 1$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$.

   a) Montrer que g est dérivable en (-2) et calculer $g'(-2)$.

   b) Montrer que g est dérivable sur]-1,0] et calculer g'(x) pour tout x∈]-1,0].

EXERCICE 2 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer f '(x) :

1) $f(x)=(x^3 + 3x)^4$ 2) $f(x)=\frac{3x^2-4x-2}{1-x}$ 3) $f(x)=\sqrt{3x^2 - 4x + 1}$ 4) $f(x)=-2x + 1 - \frac{3}{(2x-4)^3}$

EXERCICE 3 :

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-2}$ On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2) Etablir le tableau de variation de f.
3) Etudier les branches infinies de (C).

EXERCICE 4 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $x \in [0, +\infty[$

1) Montrer que la fonction f est dérivable sur $I=]0, +\infty[$ et que $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ $\forall x \in I$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + |x+2| - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = (x-1)\sqrt{x-1} + 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note (C) sa courbe dans un repère du plan.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en (-2). Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

b) Tracer les demi-tangentes à la courbe (C) au point A d'abscisse (-2).

2) Montrer que la courbe (C) admet au point B d'abscisse 1 une tangente (T) dont on donnera une équation cartésienne. Tracer (T).

3) Existe –t-il un point sur la courbe (C) d'abscisse a$\in\,]-2,1[$ où la tangente est perpendiculaire à (T) ?

4) a) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer f '(x).

b) Déterminer le nombre de tangentes à (C) parallèles à l'axe des abscisses.

EXERCICE 6 :

Soit la fonction f définie sur [0,2] par f(x)=$3-\sqrt{4-x^2}$; C_f étant la courbe de f dans un repère orthonormé

1) a/ Etudier la dérivabilité de la fonction f a droite en 0 et a gauche en 2

b/ En déduire une interprétation graphique pour chaque résultat

2) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle [0,2[et que f '(x)=$\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; pour tout x$\in$]0,2[

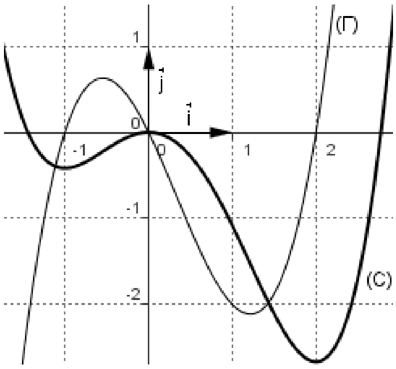
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f

EXERCICE 7 : (QCM)

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans le graphique ci-contre, (C) et (Γ) représentent respectivement deux fonctions f et g définies et dérivables sur IR. Alors :

a) f est la dérivée de g

b) g est la dérivée de f



EXERCICE 8 :

La courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur IR, telle que :

• Au V($-\infty$) la branche infinie est parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$

•Au V($+\infty$) la droite D : y=-1 est une asymptote.

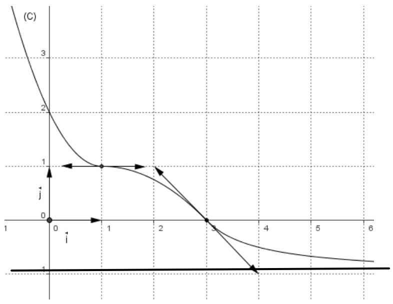
• L'unique tangente horizontale est au point A(1,1).

1) Déterminer f '(1) , f '(3) , f ''(1) et f ''(3).

2) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) Dresser le tableau de variation de f.



EXERCICE 9 :

On considère la fonction f : x $\mapsto 1-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$; x$\in$]0,3[

1) Montrer que f est dérivable sur]0,3[et que f '(x) = $\frac{9}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ pour tout x$\in$]0,3[.

2) Etablir le tableau de variation de f.

3) On pose $g(x) = f(x) + x$; $x\in\,]0,3[$.

   a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

   b) Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.

   c) Dresser alors le tableau de signe de g(x) pour $x\in [1,2]$.

4) a) Montrer que pour tout $x\in [1,2]$ on a: $|f'(x)| \leq \frac{9}{\sqrt{5}}$

   b) En déduire que pour tout $x\in [1,2]$ on a : $|f(x) + \alpha|\leq \frac{9}{\sqrt{5}}\,|x-\alpha|$.

EXERCICE 10 :

On considère la fonction f définie sur$]-\infty,\frac{1}{2}[$ par : $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$

1) Montrer que la fonction f est dérivable sur$]-\infty,\frac{1}{2}[$ et que $f'(x)=\frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$ $\forall\, x\in]-\infty,\frac{1}{2}[$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans l'intervalle$]-\infty,\frac{1}{2}[$.

   b) Vérifier que : $-1< \alpha < -\frac{1}{2}$ puis montrer que : $\alpha^2(1-2\alpha) = 1$

4) a) Montrer que pour tout $x\in[-1,-\frac{1}{2}]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

   b) En déduire que pour tout $x\in[-1,-\frac{1}{2}]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-\alpha|$

EXERCICE 11 :

Soit la fonction f définie sur]-1,+∞[par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ On note (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est dérivable sur]-1,+∞[et que : $f'(x)=\frac{x+2}{2(\sqrt{x+1})^3}$ $\forall\, x \in\,]-1,+\infty[$.

2) a) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de (+∞).

   b) Montrer que (C) admet une asymptote verticale Δ dont précisera une équation.

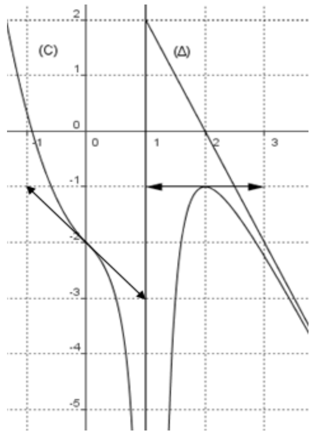
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point O.

   b) Montrer que $f(x)-x=\frac{-x^2}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$.

   c) En déduire la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

EXERCICE N12 :



Le graphique ci-contre représente la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR\{1} selon un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$. La droite Δ : y=-2x+4 est une asymptote à (C) au V(+∞) et la droite D : x=1 est une asymptote à (C) à droite et à gauche en 1

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+2x-4]$

3) Déterminer f(0) , f'(0) , f''(0) , f(2) et f'(2).

4) Déterminer les intervalles sur les quels f est dérivable

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f, contenant le tableau de signe de f '(x).